Continuité de fonctions

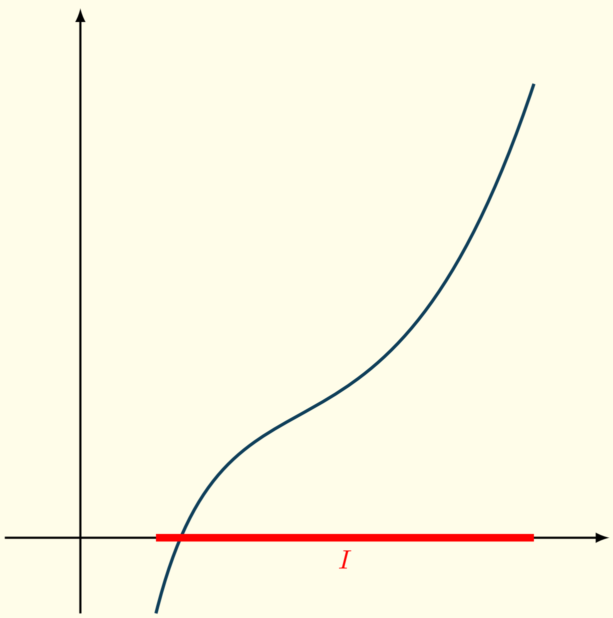
Une fiche de cours de Stéphane Pasquet - Mise à jour : 3 avril 2024

(https://courspasquet.fr) (https://mathweb.fr)

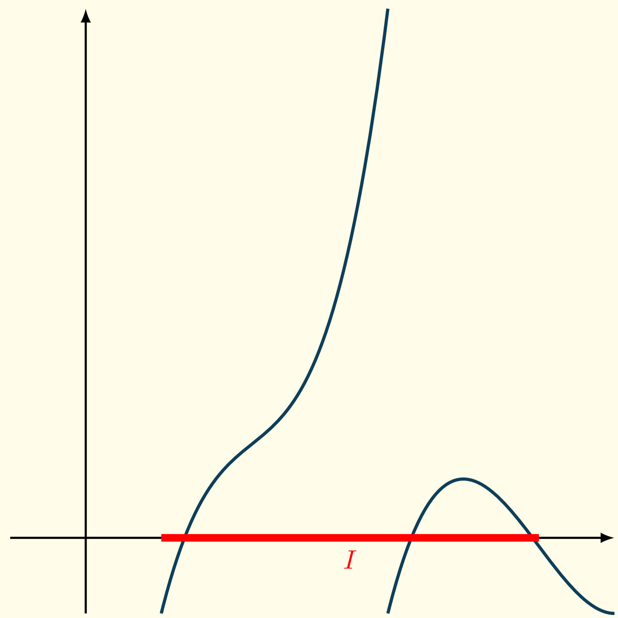
Définition

Une fonction f est *continue* sur un intervalle I si, pour tout a de I $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$.

Graphiquement, cela se traduit par le fait que la courbe représentative de f sur I se dessine en un trait (il n'y a pas de trous).



Cette courbe représente une fonction continue sur I car on peut la tracer sans lever le crayon sur I.



Cette courbe **ne représente pas** une fonction continue sur I car elle est composé de deux morceaux sur I.

Remarque : on parle de continuité sur un ensemble « en un morceau » (comme l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ ou un intervalle) mais jamais sur une union d'intervalles.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution sur $[a\,;b]$.

Corollaire du TVI

Soit f une fonction définie, continue **et strictement monotone** sur un intervalle $[a\,;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet **une unique** solution sur $[a\,;b]$.

Application du TVI

On applique le TVI quand on nous demande de démontrer qu'il existe sur un intervalle donné une solution (très souvent unique) à une équation.

Exemple : soit $f(x) = x^3 - x + 1$. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[1\,;2]$.

— Il nous faut d'abord les variations de la fonction.
  $f'(x) = 3x^2 - 1$, dont les racines sont $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(x_1) = \frac{9 + 2\sqrt{3}}{9} \approx 1,385$$

$$f(x_2) = \frac{9 - 2\sqrt{3}}{9} \approx 0,615$$

  f est donc strictement croissante sur $[1\,;2]$.

— f est continue sur $[1\,;2]$ comme fonction polynôme.

— $f(1) = 1 < 2$ et $f(2) = 7 > 2$ donc 2 est compris entre $f(1)$ et $f(2)$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[1\,;2]$.

Remarque. le TVI ne permet pas d'avoir une valeur approchée de la solution dans ce cas. Pour l'obtenir, on peut utiliser la calculatrice.